



TITLE:

# Multivariate Skew Hook Formula for $d$ -Complete Posets (Aspects of Combinatorial Representation Theory)

AUTHOR(S):

岡田, 聡一

---

CITATION:

岡田, 聡一. Multivariate Skew Hook Formula for  $d$ -Complete Posets (Aspects of Combinatorial Representation Theory). 数理解析研究所講究録 2019, 2127: 79-93

ISSUE DATE:

2019-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/252257>

RIGHT:

# Multivariate Skew Hook Formula for $d$ -Complete Posets\*

名古屋大学多元数理科学研究科

岡田 聡一

Soichi Okada

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

## 1 はじめに

鉤公式 (hook formula, hook length formula) は, Frame–Robinson–Thrall [1, Theorem 1] による標準盤の個数に対するものが最初である. 分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  (非負整数の広義単調減少列で  $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$  が有限となるもの) に対して, その Young 図形  $D(\lambda)$  を

$$D(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

と定めて, 格子点の代わりに単位正方形をおいて図示する.  $\lambda$  を枠とする標準盤 (standard tableau) とは,  $\lambda$  の Young 図形の各正方形に  $1, 2, \dots, n = |\lambda|$  を 1 つずつ次の 2 条件 (a), (b) をみたすように書き込んだもののことである:

- (a)  $1, 2, \dots, n$  が 1 回ずつ現れる.
- (b) 各行, 各列の成分は単調減少である.

例えば,

8	7	5	2
6	4	3	
1			

は,  $\lambda = (4, 3, 1)$  を枠とする標準盤である. このとき, Frame–Robinson–Thrall の鉤公式は,  $\lambda$  を枠とする標準盤の個数  $f^\lambda$  が

$$f^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{v \in D(\lambda)} h_{D(\lambda)}(v)} \quad (1)$$

で与えられることを主張している. ここで,  $v = (i, j) \in D(\lambda)$  に対して,  $h_{D(\lambda)}(v)$  は  $v$  における鉤長 (hook length) であり,

$$h_{D(\lambda)}(v) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$$

---

\*この報告は, 成瀬 弘 氏との共同研究 [18] に基づくものである.

(ただし,  $\lambda'_j$  は  $D(\lambda)$  の第  $j$  列の長さ) によって与えられる. 例えば,  $\lambda = (4, 3, 1)$  のとき, 鉤長を  $D(\lambda)$  の正方形に書き込むと,

6	4	3	1
4	2	1	
1			

となるから,  $(4, 3, 1)$  を枠とする標準盤の個数は

$$f^{(4,3,1)} = \frac{8!}{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 70$$

となる.

その後, Stanley [24, Corollary 5.3, 5.4] は, Frame–Robinson–Thrall の鉤公式の  $q$  類似として, 逆平面分割の 1 変数母関数に対する鉤公式を見出した. 分割  $\lambda$  を枠とする逆平面分割 (reverse plane partition) とは,  $\lambda$  の Young 図形の各正方形に非負整数を 1 つずつ書き込んで, 各行, 各列の成分が広義単調増加となるようにしたもののである. (逆平面分割は  $D(\lambda)$  から非負整数全体のなす集合  $\mathbb{N}$  への写像とみなすことができる.)  $\lambda$  を枠とする逆平面分割全体のなす集合を  $\mathcal{A}(D(\lambda))$  と表し,  $\sigma \in \mathcal{A}(D(\lambda))$  に対して  $|\sigma| = \sum_{v \in D(\lambda)} \sigma(v)$  とおく. 例えば,

$$\sigma = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 4 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$$

は  $\lambda = (4, 3, 1)$  を枠とする逆平面分割であり,  $|\sigma| = 13$  である. このとき, Stanley の鉤公式は

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(D(\lambda))} q^{|\sigma|} = \frac{1}{\prod_{v \in D(\lambda)} (1 - q^{h_{D(\lambda)}(v)})} \quad (2)$$

である. Gansner [2] は組合せ論的手法を用いて (2) の多変数版を導いている. 1980 年代には, 同様の公式が変形 Young 図形 ([9, 5.1.4, Exercise 21]) や根つき木 ([9, 5.1.4, Exercise 20]) に対しても成り立つことが知られていた.

標準盤, 逆平面分割はそれぞれ, Young 図形  $P = D(\lambda)$  を半順序集合と見たときの線型拡張,  $P$  分割とみなすことができる.  $n$  個の元からなる半順序集合  $P$  に対して,  $P$  の線型拡張 (linear extension) とは  $P$  から  $\{1, 2, \dots, n\}$  への順序を保つ全単射のことであり, また,  $P$  分割 ( $P$ -partition) とは  $P$  から  $\mathbb{N}$  への順序を反転する写像のことである.  $P$  分割全体のなす集合を  $\mathcal{A}(P)$  と表す. Stanley の  $P$  分割の理論 [23] を用いると, (2) から (1) を導くことができる.

Proctor [20], [21] は, Young 図形, 変形 Young 図形, 根つき木の一般化として, 「鉤公式」が成り立つような半順序集合の広いクラス ( $d$ -complete な半順序集合の概念) を導入した. そして, Peterson–Proctor は, (1), (2) の一般化として, 次の定理を得ている.

**定理 1.1.** (Peterson–Proctor, [22] を見よ)  $P$  を  $d$ -complete な半順序集合とする. このとき,  $P$  分割の多変数母関数は

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P)} z^\sigma = \frac{1}{\prod_{v \in P} (1 - z[H_P(v)])} \quad (3)$$

で与えられる. (未定義の記号については第 2 節を参照されたい.)

しかし、表現論を利用した Peterson–Proctor による原証明は、(概要が [22] で与えられているものの) 未発表である。別証明の概要が、石川–田川 [5], [6] (Schur 関数の等式を用いる)、仲田 [15], [16] (ルート系の組合せ論を用いる) によっても与えられている。本稿の主定理 (定理 1.2) は、定理 1.1 の一般化であり別証明 (同変 Schubert calculus を用いる) も与えている。

Frame–Robinson–Thrall の鉤公式 (1) の一般化のもう一つの方向として、歪 Young 図形を考えるとというものがある。分割  $\lambda, \mu$  が  $D(\lambda) \supset D(\mu)$  をみたしているとき、歪 Young 図形  $D(\lambda/\mu) = D(\lambda) \setminus D(\mu)$  の正方形に数字を書き込み、 $\lambda$  を枠とする標準盤と同様の条件をみたすようにしたものとして、 $\lambda/\mu$  を枠とする標準盤が定義できる。しかし、その個数  $f^{\lambda/\mu}$  は、きれいな積の形に表されるとは限らない。成瀬 [17] は、 $f^{\lambda/\mu}$  に対して次のような公式を見出した：

$$f^{\lambda/\mu} = |\lambda/\mu|! \sum_{D \in \mathcal{E}_{D(\lambda)}(D(\mu))} \frac{1}{\prod_{v \in D(\lambda) \setminus D} h_\lambda(v)}. \quad (4)$$

ここで、 $D$  は  $D(\mu)$  の  $D(\lambda)$  における励起図形全体をわたる。さらに、Morales–Pak–Panova [14] は、成瀬の公式 (4) の  $q$  類似として、 $P = D(\lambda/\mu)$  上の  $P$  分割の 1 変数母関数を与えている。

本稿の主結果は、Peterson–Proctor の鉤公式 (定理 1.1) の歪類似である。半順序集合  $P$  の部分集合  $F$  は、条件「 $P$  において  $x < y$  であり  $x \in F$  であるならば  $y \in F$  となる」をみたすとき、 $P$  のフィルターであるという。

**定理 1.2.**  $P$  を  $d$ -complete な半順序集合とし、 $F$  を  $P$  のフィルターとする。このとき、 $(P \setminus F)$  分割 (ただし、 $P \setminus F$  を  $P$  の部分半順序集合とみなす) の多変数母関数は、

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P \setminus F)} z^\sigma = \sum_{D \in \mathcal{E}_P(F)} \frac{\prod_{v \in B(D)} z[H_P(v)]}{\prod_{v \in P \setminus D} (1 - z[H_P(v)])} \quad (5)$$

の形に表される。ここで、 $D$  は  $F$  の  $P$  における励起図形全体にわたる。(未定義の記号については第 2 節を参照されたい。)

この定理 1.2 において  $F = \emptyset$  ととると、Peterson–Proctor の定理 (定理 1.1) が得られる。また、半順序集合  $P$  とそのフィルター  $F$  がいずれも  $P = D(\lambda)$ ,  $F = D(\mu)$  と Young 図形で与えられるときは、(5) において変数  $z_i$  をすべて  $q$  に特殊化することによって Morales–Pak–Panova の  $q$  鉤公式 [14, Corollary 6.17] が得られ、さらに、 $P$  分割の理論を用いることによって成瀬の鉤公式 (4) が導かれる。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節では、 $d$ -complete な半順序集合と関連する用語の定義をまとめ、主定理の鍵となる励起図形、励起ピークの定義を与える。第 3 節では、 $d$ -complete な半順序集合に関連するいくつかの概念を Lie 理論的に記述する。第 4 節では、Kac–Moody 一般旗多様体の同変  $K$  理論における Billey 型公式、Chevalley 型公式を用いた定理 1.2 の証明の概要を説明する。

## 2 $d$ -complete な半順序集合の組合せ論

この節では、 $d$ -complete な半順序集合と関連する概念の定義をまとめ、励起図形、励起ピーク の概念を導入する。

### 2.1 $d$ -complete な半順序集合の定義

3 以上の整数  $k$  に対して、半順序集合  $d_k(1)$  を、 $(2k-2)$  個の元  $u_1, \dots, u_{k-2}, x, y, v_{k-2}, \dots, v_1$  からなりその Hasse 図形が図 1 で与えられるものとして定義する。つまり、 $d_k(1)$

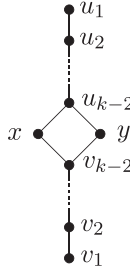


図 1:  $d_k$  の Hasse 図形

における被覆関係は、

$$u_1 \succ u_2 \succ \dots \succ u_{k-2}, \quad u_{k-2} \succ x \succ v_{k-2}, \quad u_{k-2} \succ y \succ v_{k-2}, \quad v_{k-2} \succ \dots \succ v_2 \succ v_1$$

で尽くされている。ここで、記号  $v \prec u$  は、 $v < u$  であり  $v < w < u$  となる  $w$  が存在しない ( $u$  が  $v$  を被覆する) ことを表す。半順序集合  $d_k(1)$  において 2 元  $x, y$  は比較不可能であることに注意する。

半順序集合  $P$  の区間  $[v, u] = \{x \in P : v \leq x \leq u\}$  で  $d_k(1)$  と半順序集合として同型であるものを、 $d_k$  型区間という。このとき、 $[v, u]$  の最大元  $u$ 、最小元  $v$  をそれぞれ  $[v, u]$  の首 (neck)、尾 (tail) と呼び、比較不可能な 2 元を  $[v, u]$  の肘 (elbow) と呼ぶ。部分集合  $I \subset P$  は、条件「 $P$  において  $x < y < z$  であり、 $x, z \in I$  であるならば  $y \in I$  となる」をみたすとき、凸 (convex) であるという。 $P$  の凸部分集合  $I$  は、 $d_k(1)$  から最大元を取り除いた半順序集合と同型であるとき、 $d_k^-$  型凸集合であるという。

**定義 2.1.** 有限半順序集合  $P$  は、すべての  $k \geq 3$  に対して次の 3 条件 (D1), (D2), (D3) をみたすとき、 **$d$ -complete** であるという：

- (D1)  $I \subset P$  が  $d_k^-$  型凸集合ならば、 $I$  の極大元を被覆する元  $u \in P$  で  $I \cup \{u\}$  が  $d_k$  型区間となるものが存在する。
- (D2)  $I = [v, u]$  が  $P$  の  $d_k$  型区間であり、その首  $u$  が  $P$  において  $u'$  を被覆するならば、 $u' \in I$  となる。
- (D3)  $I, I'$  がいずれも  $d_k^-$  型凸集合であり、 $I \setminus \{v\} = I' \setminus \{v'\}$  (ただし、 $v, v'$  はそれぞれ  $I, I'$  の最小元) が成り立つならば、 $I = I'$  となる。

明らかに、根つき木は  $d$ -complete な半順序集合 (根を最大元とみなす) である。

例 2.2.  $\mathbb{Z}^2$  上の半順序  $\leq$  を

$$(i, j) \leq (i', j') \iff i \geq i', j \geq j'$$

によって定義する．このとき，次の部分集合はこの  $\mathbb{Z}^2$  上の半順序に関して  $d$ -complete である：

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : i \geq 1, 1 \leq j \leq \lambda_i\}, \\ S(\mu) &= \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : i \geq 1, i \leq j \leq \mu_i + i - 1\}, \\ e_6(1) &= \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), \\ (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

ここで， $\lambda$  は分割 ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ ) であり， $\mu$  はストリクトな分割 ( $\mu_1 > \mu_2 > \dots$ ) である．Proctor [20] では， $D(\lambda)$  を shape,  $S(\mu)$  を shifted shape,  $e_6(1)$  を swivel と呼んでいる．例えば， $D(5, 4, 2, 1)$ ,  $S(5, 4, 2, 1)$ ,  $e_6(1)$  の Hasse 図はそれぞれ，図 2 (a), (b), (c) のようになる．以下では， $\mathbb{Z}^2$  の部分集合を，Young 図形のように，格子点の代わりに単

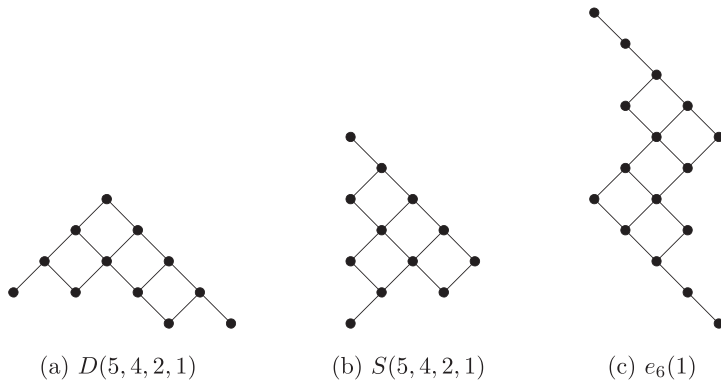


図 2:  $d$ -complete な半順序集合の Hasse 図形

位正方形をおいて表すこともある．

半順序集合  $P$  は，その Hasse 図形が連結なグラフとなるときの，連結 (connected) であるという．定義から容易にわかるように， $P$  が  $d$ -complete ならば， $P$  の連結成分も  $d$ -complete である．よって， $P$  分割の母関数を考えるときには， $P$  は連結であると仮定してよい．

**命題 2.3.** ([20, §3]) 連結な半順序集合  $P$  が  $d$ -complete であるならば， $P$  には最大元がただ 1 つ存在する (つまり，最大元が存在する)．

## 2.2 頭頂木と $d$ -complete な彩色

一般に， $P$  を半順序集合とし， $P$  には最大元  $t$  が存在すると仮定する．このとき，

$$\Gamma = \{v \in P : \text{区間 } [v, t] \text{ は鎖である}\}$$

とおき,  $P$  の Hasse 図形の部分グラフと見て  $P$  の頭頂木 (top tree) と呼ぶ. 以下では,  $P$  の頭頂木を (多重辺をもたない) Dynkin 図形とみなす. 例えば, 図 1, 図 2 (a), (b), (c) の  $d$ -complete な半順序集合の頭頂木はそれぞれ,  $D_k$  型,  $A_8$  型,  $D_6$  型,  $E_6$  型の Dynkin 図形である.

**命題 2.4.** ([21, Proposition 8.6])  $P$  を連結で  $d$ -complete な半順序集合とする.  $P$  の頭頂木を  $\Gamma$  とし,  $I$  を  $\Gamma$  の頂点数と同じ濃度をもつ色集合とする. このとき, 全単射  $c: \Gamma \rightarrow I$  は次の 3 条件 (C1), (C2), (C3) をみたす写像  $c: P \rightarrow I$  に一意的に拡張できる:

(C1)  $x, y \in P$  が比較不可能であるならば,  $c(x) \neq c(y)$  である.

(C2)  $P$  の区間  $[v, u]$  が鎖になっているならば, その鎖に現れる色  $c(x)$  ( $x \in [v, u]$ ) は互いに相異なる.

(C3)  $P$  の区間  $[v, u]$  が  $d_k$  型区間になっているならば,  $c(v) = c(u)$  である.

このような写像  $c: P \rightarrow I$  を  $P$  の  **$d$ -complete な彩色**と呼ぶ.

**例 2.5.** 図 3 で与えた彩色は,  $d$ -complete な彩色である. 一般に, Young 図形  $D(\lambda)$ , 変形 Young 図形  $S(\mu)$  (ただし,  $\mu$  の長さは 2 以上であるとする) の場合は, 写像  $c_{D(\lambda)}: D(\lambda) \rightarrow \{-(\lambda'_1 - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, \lambda_1 - 1\}$ ,  $c_{S(\mu)}: S(\mu) \rightarrow \{0, 0', 1, 2, \dots, \mu_1 - 1\}$  を

$$c_{D(\lambda)}(i, j) = j - i, \quad c_{S(\mu)}(i, j) = \begin{cases} j - i & (i < j \text{ のとき}), \\ 0 & (i = j \text{ かつ } i \text{ が奇数のとき}), \\ 0' & (i = j \text{ かつ } i \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

で定めると, これらは  $d$ -complete な彩色となる.

0	1	2	3	4
-1	0	1	2	
-2	-1			
-3				

(a)  $D(5, 4, 2, 1)$

0	1	2	3	4
	0'	1	2	3
		0	1	
			0'	

(b)  $S(5, 4, 2, 1)$

1	2	3	4	5			
		6	3	4			
			2	3	6		
			1	2	3	4	5

(c)  $e_6(1)$

図 3:  $d$ -complete な彩色

## 2.3 鉤単項式

以下では,  $P$  は連結で  $d$ -complete な半順序集合であると仮定し,  $\Gamma$  をその頭頂木とする.  $P$  の  $d$ -complete な彩色  $c: P \rightarrow I$  を 1 つ固定し,  $I$  を  $\Gamma$  の頂点集合と同一視する. また,  $I$  の元と 1 対 1 に対応する変数  $z = (z_i)_{i \in I}$  を用意する.

$P$  のフィルター  $F$  が与えられたとき,  $P \setminus F$  を  $P$  の部分半順序集合とみなす.  $(P \setminus F)$  分割  $\sigma \in \mathcal{A}(P \setminus F)$  に対して,

$$z^\sigma = \prod_{v \in P \setminus F} z_{c(v)}^{\sigma(v)}$$

と定義し,  $\mathcal{A}(P \setminus F)$  の多変数母関数

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P \setminus F)} z^\sigma$$

を考える.

**定義 2.6.**  $P$  の各元  $u$  に対して対応する鉤単項式 (hook monomial)  $z[H_P(u)]$  を,  $P$  の半順序に関する下からの帰納法で, 次のように定義する:

(i)  $u$  がどの  $d_k$  型区間の首にもなっていないときは,

$$z[H_P(u)] = \prod_{w \leq u} z_{c(w)}$$

と定義する.

(ii)  $u$  が  $d_k$  型区間  $[v, u]$  の首になっているときは,

$$z[H_P(u)] = \frac{z[H_P(x)] \cdot z[H_P(y)]}{z[H_P(v)]}$$

(ただし,  $x, y$  は  $[v, u]$  の肘である) と定義する.

**例 2.7.**  $P$  が Young 図形  $D(\lambda)$ , あるいは, 変形 Young 図形  $S(\mu)$  であるときは, 部分集合としての鉤  $H_{D(\lambda)}(u) \subset D(\lambda)$ ,  $H_{S(\mu)}(u) \subset S(\mu)$  がそれぞれ次のように定義される:

$$\begin{aligned} H_{D(\lambda)}(i, j) &= \{(i, l) \in D(\lambda) : l \geq j\} \cup \{(k, j) \in D(\lambda) : k > i\}, \\ H_{S(\mu)}(i, j) &= \{(i, l) \in S(\mu) : l \geq j\} \cup \{(k, j) \in S(\mu) : k > j\} \\ &\quad \cup \{(j+1, l) \in S(\mu) : l > j\}. \end{aligned}$$

この場合は, 定義 2.6 で与えた鉤単項式  $z[H_P(u)]$  は

$$z[H_P(u)] = \prod_{v \in H_P(u)} z_{c(v)}$$

と表される.

## 2.4 励起図形と励起ピーク

$d$ -complete な半順序集合に対する歪鉤公式を定式化するためには, [3], [4], [8], [10], [11] [14] で Young 図形, 変形 Young 図形に対して導入された励起図形, 励起ピーク概念を, 一般の  $d$ -complete な半順序集合に対して一般化する必要がある.

Dynkin 図形  $\Gamma$  の頂点  $i \in I$  に対して,

$$N_i = \{x \in P : c(x) \text{ は } \Gamma \text{ において } i \text{ と隣接している}\}$$

とおく.  $[v, u]$  が  $d_k$  型区間であるとき,  $c(u) = c(v)$  であり,

$$[v, u] \cap N_{c(u)} = \{z \in [v, u] : z \text{ は } u \text{ に被覆される, あるいは, } v \text{ を被覆する}\}$$

となることに注意する.

**定義 2.8.**  $P$  は連結で  $d$ -complete な半順序集合であると仮定し,  $F$  を  $P$  のフィルターとする.



- (a)  $D$  を  $P$  の部分集合とし,  $u \in D$  とする. 次の条件 (i), (ii) をみたす元  $v \in P \setminus D$  が存在するとき,  $u$  は  $D$  に関して励起可能 ( $D$ -active) であるという:

(i)  $v < u$  であり,  $[v, u]$  は  $d_k$  型区間である.

(ii)  $[v, u] \cap D \cap N_{c(u)} = \emptyset$  である.

- (b)  $D$  を  $P$  の部分集合とし,  $u \in D$  とする.  $u$  が  $D$  に関して励起可能であるとき,  $P$  の部分集合  $\alpha_u(D)$  を

$$\alpha_u(D) = D \setminus \{u\} \cup \{v\}$$

(ただし,  $[v, u]$  は  $u$  を首とする  $d_k$  型区間である) において定義する. この操作を基本励起 (elementary excitation) と呼ぶ.

- (c)  $F$  に基本励起を繰り返し施して得られる  $P$  の部分集合を,  $F$  の  $P$  における励起図形 (excited diagram) と呼ぶ.  $F$  の  $P$  における励起図形全体のなす集合を  $\mathcal{E}_P(F)$  とおく.

- (d) 励起図形  $D \in \mathcal{E}_P(F)$  に対して, 部分集合  $B(D) \subset P$  を次のように帰納的に定義する:

(i)  $D = F$  のときは,  $B(F) = \emptyset$  とする.

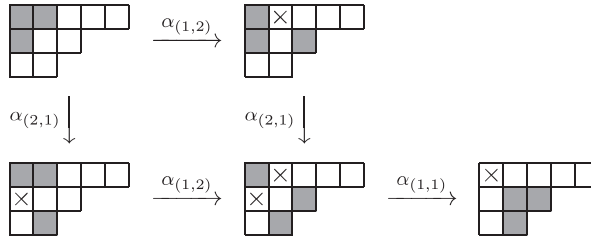
(ii)  $u$  が  $D$  に関して励起可能であるときは,

$$B(\alpha_u(D)) = (B(D) \setminus ([v, u] \cap N_{c(u)})) \cup \{u\}$$

(ただし,  $[v, u]$  は  $u$  を首とする  $d_k$  型区間である) とする.

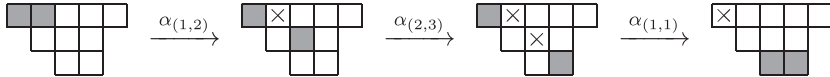
$B(D)$  の元を  $D$  の励起ピーク (excited peak) と呼ぶ. ( $B(D)$  が基本励起の仕方によらずに定まり,  $P \setminus D$  の部分集合となることが証明できる.)

例 2.9. (1)  $P = D(5, 3, 2)$ ,  $F = D(2, 1)$  のとき,  $F$  の  $P$  における励起図形は次の 5 つある.



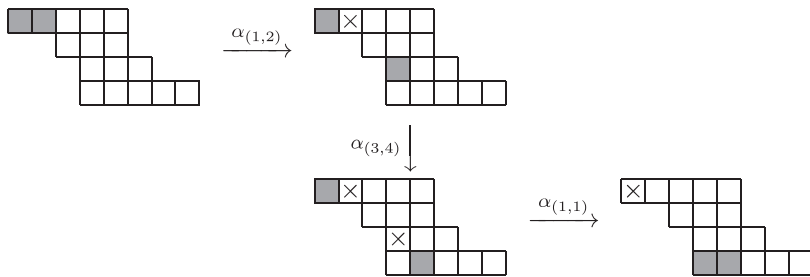
ここで, 灰色の正方形が励起図形の正方形であり,  $\times$  のある正方形が励起ピークの正方形である.

- (2)  $P = S(5, 3, 2)$ ,  $F = S(2)$  のときは,  $F$  の  $P$  における励起図形は次の 4 つである.



- (3)  $P = e_6(1)$  であり,  $F$  が 2 元からなるフィルターであるときは,  $F$  の  $P$  における

励起図形は次の 4 つである.



### 3 $d$ -complete な半順序集合と Weyl 群, ルート系

この節では,  $d$ -complete な半順序集合の組合せ論が, Weyl 群, ルート系などの Lie 理論とどのように関係しているのかを説明する.

#### 3.1 $d$ -complete な半順序集合と Lie 理論

$P$  を連結で  $d$ -complete な半順序集合とし,  $\Gamma$  をその頭頂木とする.  $\Gamma$  を (多重辺をもたない) Dynkin 図形とみなし, その頂点集合を  $I$  とする. このとき,  $A$  に付随したルートデータ  $(\Lambda, \Lambda^*, \Pi, \Pi^\vee)$  を固定する. つまり,

- $\Lambda$  (ウェイト格子) は階数有限の自由  $\mathbb{Z}$  加群,
- $\Lambda^*$  (余ウェイト格子) は  $\Lambda$  の双対格子  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Z})$ ,
- $\Pi = \{\alpha_i : i \in I\}$  (単純ルート系) は  $\Lambda$  の線型独立な部分集合,
- $\Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee : i \in I\}$  (単純余ルート系) は  $\Lambda^*$  の部分集合

であり, 自然なベアリング  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^* \times \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$  に関して

$$\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{i,j} = \begin{cases} 2 & (i = j \text{ のとき}), \\ -1 & (i \neq j \text{ であり, } i, j \text{ が } \Gamma \text{ において隣接しているとき}), \\ 0 & (i \neq j \text{ であり, } i, j \text{ が } \Gamma \text{ において隣接していないとき}) \end{cases}$$

をみたしている. また,  $\langle \alpha_i^\vee, \lambda_j \rangle = \delta_{i,j}$  ( $i, j \in I$ ) となる  $\{\lambda_i : i \in I\} \subset \Lambda$  (基本ウェイト) を固定する. 対応する Weyl 群を  $W = \langle s_i : i \in I \rangle$  とし,  $l : W \rightarrow \mathbb{N}$  を長さ関数,  $<$  を  $W$  上の Bruhat 順序とする.  $\Phi = W\Pi$ ,  $\Phi^\vee = W\Pi^\vee$  をそれぞれ実ルート系, 実余ルート系とし,  $\Phi_+$ ,  $\Phi_+^\vee$  をそれぞれ  $\Pi$ ,  $\Pi^\vee$  から定まる正ルート系, 正余ルート系とする.

さて,  $d$ -complete な彩色  $c : P \rightarrow I$  を用いて,

$$\alpha(p) = \alpha_{c(p)}, \quad \alpha^\vee(p) = \alpha_{c(p)}^\vee, \quad s(p) = s_{c(p)} \quad (p \in P)$$

と定義する. そして,  $P$  の線型拡張  $\tau : P \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  をとり,  $p_k = \tau^{-1}(k)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) において  $P$  の元をラベルづけする. このとき,  $P$  において  $p_k < p_l$  ならば  $k < l$  となる.  $P$  の部分集合  $D = \{p_{i_1}, \dots, p_{i_r}\}$  ( $i_1 < \dots < i_r$ ) に対して

$$w_D = s(p_{i_1}) \dots s(p_{i_r}) \in W$$

と定義する. また,  $p_k \in P$  に対して

$$\beta(p_k) = s(p_1) \cdots s(p_{k-1}) \alpha(p_k) \in \Phi, \quad \gamma^\vee(p_k) = s(p_N) \cdots s(p_{k+1}) \alpha^\vee(p_k) \in \Phi^\vee$$

とおく. 実は,  $w_D, \beta(p), \gamma^\vee(p)$  は  $P$  の線型拡張のとり方によらないことが示される.

$P$  の最大元  $t$  の彩色を  $i_P = c(t) \in I$  とし,  $\lambda_P \in \Lambda$  を対応する基本ウェイトとする. このとき,  $W$  における  $\lambda_P$  の固定化部分群  $W_{\lambda_P}$  は,  $I \setminus \{i_P\}$  に対応する  $W$  の放物型部分群である. また,

$$W^{\lambda_P} = \{w \in W : w \text{ は剰余類 } wW_{\lambda_P} \text{ の中で長さ最少である}\}$$

とおき,  $W$  上の Bruhat 順序に関して半順序集合とみなす.

このとき,  $d$ -complete な半順序集合の組合せ論は, Weyl 群やルート系を用いて次のように記述することができる. 証明は, [20], [22], [25] を参照されたい.

**命題 3.1.**  $P$  を連結で  $d$ -complete な半順序集合とし, 上で導入した記号を用いる. このとき,

- (a) 元  $w_P \in W$  は  $\lambda_P$  ミニスキュールである. つまり, 任意の  $p \in P$  に対して  $\langle \gamma^\vee(p), \lambda_P \rangle = 1$  が成り立つ.
- (b) 元  $w_P$  は完全可換である. つまり,  $w_P$  の任意の簡約表示は,  $st = ts$  の形の Coxeter 関係式のみを用いて互いに移りあう.
- (c) 対応  $P \ni p \mapsto \gamma^\vee(p) \in \Phi_+^\vee \cap w_P^{-1}(-\Phi_+^\vee)$  は全単射であり,  $P$  において  $p < q$  であることと,  $\Phi_+^\vee \cap w_P^{-1}(-\Phi_+^\vee)$  において  $\gamma^\vee(p) > \gamma^\vee(q)$  であることは同値である. ここで,  $\Phi_+^\vee$  上の半順序  $<$  は,

$$\alpha^\vee > \beta^\vee \iff \alpha^\vee - \beta^\vee \text{ は正余ルートの非負整数係数の線型結合として表される}$$

によって与えられる.

- (d)  $z_i = e^{\alpha_i}$  ( $i \in I$ ) と同一視すると,  $z[H_P(p)] = e^{\beta(p)}$  ( $p \in P$ ) となる.
- (e)  $J^*(P)$  を  $P$  のフィルター全体が包含関係に関してなす半順序集合とし,  $[e, w_P]$  を Bruhat 順序に関する  $W^{\lambda_P}$  の区間とすると, 対応  $J^*(P) \ni F \mapsto w_F \in [e, w_P]$  は順序同型写像である.
- (f)  $F$  が  $P$  のフィルターならば,  $w_F$  は  $\lambda_P$  ミニスキュールであり,  $w_F \lambda_P = \lambda_P - \sum_{p \in F} \alpha(p)$  である.

### 3.2 励起図形と Weyl 群

この小節では, 励起図形, 励起ピークと Weyl 群との関係を与える.  $W$  上の結合的積 (Demazure 積と呼ばれる)  $*$ :  $W \times W \rightarrow W$  が

$$s_i * w = \begin{cases} s_i w & (l(s_i w) = l(w) + 1 \text{ のとき}), \\ w & (l(s_i w) = l(w) - 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定まる.  $P$  の線型拡張を固定し,  $P$  の部分集合  $D = \{p_{i_1}, \dots, p_{i_r}\}$  ( $i_1 < \dots < i_r$ ) に対して,

$$w_D^* = s(p_{i_1}) * s(p_{i_2}) * \cdots * s(p_{i_r}).$$

と定義する. このとき, 命題 3.1(b) から,  $w_D^*$  が  $P$  の線型拡張のとり方によらないことがわかる. 次の命題は, 本稿の主定理 (定理 1.2) の証明の鍵の 1 つである. (証明は [18, Section 3] を参照されたい.)

**命題 3.2.**  $P$  を連結で  $d$ -complete な半順序集合とし,  $F$  を  $P$  のフィルターとする. このとき,  $P$  の部分集合  $E$  に対して,

- (a)  $\#E = \#F$  であるとき,  $w_E = w_F$  となるための必要十分条件は,  $E \in \mathcal{E}_P(F)$  となることである.
- (b)  $w_E^* = w_F$  となるための必要十分条件は,  $E$  が  $D \in \mathcal{E}_P(F)$  と  $S \subset B(D)$  を用いて  $E = D \sqcup S$  と表されることである.

## 4 同変 $K$ 理論と定理 1.2 の証明

この節では, Kac-Moody 一般旗多様体の同変  $K$  理論 (例えば [12, Section 3] を見よ) を用いた主定理 (定理 1.2) の証明の概要を与える.

### 4.1 Kac-Moody 一般旗多様体の同変 $K$ 理論

$P$  を連結で  $d$ -complete な半順序集合とし,  $\Gamma$  をその頭頂木とする. Dynkin 図形  $\Gamma$  に付随したルートデータ  $(\Lambda, \Lambda^*, \Pi, \Pi^\vee)$  から,  $\mathbb{C}$  上の Kac-Moody 群  $\mathcal{G}$ , その Borel 部分群  $\mathcal{B}_-$  ( $-\Phi_+$  に対応する), 極大トーラス  $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}_-$  を構成することができる.  $i_P \in I$  を  $P$  の最大元の彩色とし,  $\lambda_P$  を対応する基本ウェイトとする.  $\mathcal{P}_- \supset \mathcal{B}_-$  を  $J = I \setminus \{i_P\}$  に対応する  $\mathcal{G}$  の放物型部分群とする. このとき, 柏原 [7] による一般旗多様体  $\mathcal{X} = \mathcal{G}/\mathcal{P}_-$  を考える.

$\mathcal{X}$  の  $\mathcal{T}$  同変  $K$  理論を  $K_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$  と表す.  $K_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$  には 1 点の  $\mathcal{T}$  同変  $K$  理論  $K_{\mathcal{T}}(\text{pt})$  上の結合的可換代数の構造が入り,  $K_{\mathcal{T}}(\text{pt})$  は群環  $\mathbb{Z}[\Lambda]$  (基底を  $\{e^\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  と表す) と同型である. 以下では,  $i \in I$  に対して  $z_i = e^{\alpha_i}$  と同一視する. 各  $v \in W^{\lambda_P}$  に対して, 対応する Schubert 部分多様体  $\mathcal{X}_v$  の構造層  $\mathcal{O}_v$  の類 (同変 Schubert 類) を  $[\mathcal{O}_v] \in K_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$  と表す. このとき,  $K_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$  の任意の元は,  $\{[\mathcal{O}_v] : v \in W^{\lambda_P}\}$  の  $K_{\mathcal{T}}(\text{pt})$  係数の線型結合 (無限和も許す) として表される.

一方, 各  $w \in W^{\lambda_P}$  に対して,  $\mathcal{T}$  固定点  $e_w = w\mathcal{P}_-/\mathcal{P}_- \in \mathcal{X}$  が定まり, 包含写像  $\iota_w : \{e_w\} \rightarrow \mathcal{X}$  によって環準同型写像 ( $w$  における局所化写像)  $\iota_w^* : K_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}) \rightarrow K_{\mathcal{T}}(e_w) \cong \mathbb{Z}[\Lambda]$  が引き起こされる. 2 つの元  $v, w \in W^{\lambda_P}$  に対して,

$$\xi^v|_w = \iota_w^*([\mathcal{O}_v]) \in \mathbb{Z}[\Lambda]$$

と定義する. このとき, 命題 3.1 (d) を用いると, Billey 型の公式 [12, Proposition 2.10] から次の具体的な表示式が導かれる.

**命題 4.1.** 連結で  $d$ -complete な半順序集合  $P$  とそのフィルター  $F$  に対して,

$$\xi^{w_F}|_{w_P} = \sum_{E: w_E^* = w_F} (-1)^{\#E - \#F} \prod_{p \in E} (1 - z[H_P(p)]). \quad (6)$$

ここで, 和は  $w_E^* = w_F$  をみたす部分集合  $E \subset P$  全体にわたる.

## 4.2 同変 $K$ 理論版 Littlewood–Richardson 係数

同変  $K$  理論  $K_{\mathcal{T}}(\mathcal{X})$  における, 同変 Schurbert 類に関する積の構造定数を考える.  $u, v, w \in W^{\lambda_P}$  に対して,  $c_{u,v}^w \in K_{\mathcal{T}}(\text{pt}) \cong \mathbb{Z}[\Lambda]$  を

$$[\mathcal{O}_u][\mathcal{O}_v] = \sum_{w \in W^{\lambda_P}} c_{u,v}^w [\mathcal{O}_w] \quad (7)$$

によって定める. このとき,  $u \leq w, v \leq w$  のいずれかが成り立たなければ  $c_{u,v}^w = 0$  である. また, 次の命題の証明は難しくない. (例えば, (b) は結合法則  $([\mathcal{O}_s][\mathcal{O}_u])[\mathcal{O}_w] = [\mathcal{O}_s]([\mathcal{O}_u][\mathcal{O}_w])$  における  $[\mathcal{O}_w]$  の係数を比較すればよい.)

**命題 4.2.** (a)  $v, w \in W^{\lambda_P}$  に対して,  $c_{v,w}^w = \xi^v|_w$ .

(b)  $u, v, w \in W^{\lambda_P}, s = s_{i_P} \in W^{\lambda_P}$  とする. もし  $c_{s,w}^w \neq c_{s,u}^u$  であるならば,

$$c_{u,w}^w = \frac{1}{c_{s,w}^w - c_{s,u}^u} \sum_{u < x \leq w} c_{s,u}^x c_{x,w}^w. \quad (8)$$

命題 3.1 (c), (e), (f) を用いると, Chevalley 型の公式 [13, Theorem 4.8] から次の具体的な表示式を導くことができる. (証明は [18, Section 4] を見よ.)

**命題 4.3.**  $P$  を連結で  $d$ -complete な半順序集合とし,  $s = s_{i_P}$  とおく.  $P$  のフィルター  $F, F'$  に対して,

$$c_{s,w_F}^{w_{F'}} = \begin{cases} 1 - z[F] & (F' = F \text{ のとき}) \\ (-1)^{\#(F' \setminus F) - 1} z[F] & (F' \supsetneq F \text{ であり, } F' \setminus F \text{ が反鎖であるとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (9)$$

ここで,  $z[F] = \prod_{p \in F} z_{c(p)}$  である.

## 4.3 主定理の証明

以上の準備のもとで, 定理 1.2 の証明の概要を与えることができる. 定理 1.2 を証明するには, 次の 2 つの等式を示せばよい:

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P \setminus F)} z^{\sigma} = \frac{\xi^{w_F}|_{w_P}}{\xi^{w_P}|_{w_P}}, \quad (10)$$

$$\frac{\xi^{w_F}|_{w_P}}{\xi^{w_P}|_{w_P}} = \sum_{D \in \mathcal{E}_P(F)} \frac{\prod_{q \in B(D)} z[H_P(q)]}{\prod_{p \in P \setminus D} (1 - z[H_P(p)])}. \quad (11)$$

等式 (10) は, 命題 4.3 と  $\#(P \setminus F)$  に関する帰納法を用いて証明できる.  $P$  のフィルター  $F$  に対して,

$$G_{P/F}(z) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P \setminus F)} z^{\sigma}, \quad Z_{P/F}(z) = \frac{\xi^{w_F}|_{w_P}}{\xi^{w_P}|_{w_P}}$$

とおく.  $Z_{P/P}(z) = G_{P/P}(z) = 1$  だから,  $Z_{P/F}(z)$  と  $G_{P/F}(z)$  が同じ形の漸化式

$$X_{P/F}(z) = \frac{1}{1 - z[P \setminus F]} \sum_{F'} (-1)^{\#(F' \setminus F) - 1} X_{P/F'}(z), \quad (12)$$

(ただし,  $F'$  は  $F \subsetneq F' \subset P$  をみたし  $F' \setminus F$  が反鎖となるような  $P$  のフィルター全体を動く) をみたすことを示せばよい. まず,  $G_{P/F}(z)$  が (12) をみたすことを示す.  $P \setminus F$  の極大元全体のなす集合を  $M$  とし,

$$\mathcal{A}(P \setminus F)_I = \{\sigma \in \mathcal{A}(P \setminus F) : \sigma(x) = 0 \text{ for all } x \in I\} \quad (I \subset M),$$

$$\mathcal{A}'(P \setminus F) = \{\sigma \in \mathcal{A}(P \setminus F) : \sigma(x) = 0 \text{ for some } x \in M\}$$

とおく. このとき,  $G_{P/(F \sqcup I)}(z) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P \setminus F)_I} z^\sigma$  であり, 包除原理を用いると,

$$\sum_{F'} (-1)^{\#(F' \setminus F) - 1} G_{P/F'}(z) = \sum_{I \subset M, I \neq \emptyset} (-1)^{\#I - 1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P \setminus F)_I} z^\sigma = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'(P \setminus F)} z^\sigma$$

となる. さらに,  $\sigma \in \mathcal{A}(P)$  の各成分から  $\min_{v \in M} \sigma(v)$  を引いたものを考えることにより,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P \setminus F)} z^\sigma = \frac{1}{1 - z[P \setminus F]} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'(P \setminus F)} z^\sigma$$

となることがわかる. よって,  $G_{P/F}(z)$  が (12) をみたすことが示された. 次に,  $Z_{P/F}(z)$  が (12) をみたすことは, 命題 3.1 (e), 命題 4.2 (a), 命題 4.3 を用いて (8) を書き直すことによって示される. よって,  $\#(P \setminus F)$  に関する帰納法により, (10) の証明が完成する.

等式 (11) については, 命題 4.1 と命題 3.2 (b) を用いると,

$$\begin{aligned} \xi^{w_F}|_{w_P} &= \sum_{D \in \mathcal{E}_P(F)} \prod_{p \in D} (1 - z[H_P(p)]) \sum_{S \subset B(D)} (-1)^{\#S} \prod_{p \in S} (1 - z[H_P(p)]) \\ &= \sum_{D \in \mathcal{E}_P(F)} \prod_{p \in D} (1 - z[H_P(p)]) \prod_{p \in B(D)} z[H_P(p)]. \end{aligned}$$

両辺を  $\xi^{w_P}|_{w_P} = \prod_{p \in P} (1 - z[H_P(p)])$  で割ると, (11) が得られる. 以上で, 定理 1.2 の証明が完成する.

最後に, 次の問題を提起して本稿を終える.

**問題 4.4.** 定理 1.2 を組合せ論的に証明せよ. 例えば,  $\mathcal{A}(P \setminus F)$  を

$$\mathcal{A}(P \setminus F) = \bigsqcup_{D \in \mathcal{E}_P(F)} \mathcal{A}(P \setminus F; D)$$

の形に分割し,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P \setminus F; D)} z^\sigma = \frac{\prod_{v \in B(D)} z[H_P(v)]}{\prod_{v \in P \setminus D} (1 - z[H_P(v)])}$$

を示す全単射を構成せよ.

**問題 4.5.** 定理 1.2 の  $(q, t)$  類似を定式化し証明せよ. つまり, [19, Conjecture 4.4] で与えた  $(q, t)$  鉤公式を, 歪鉤公式に拡張せよ.

## 参考文献

- [1] J. S. Frame, G. de B. Robinson, and R. W. Thrall, The hook graphs of the symmetric group, *Can. J. Math.* **6** (1954), 316–325.
- [2] E. R. Gansner, The Hillman–Grassl correspondence and the enumeration of reverse plane partitions, *J. Combin. Theory Ser. A* **30** (1981), 71–89.
- [3] T. Ikeda and H. Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 5193–5221.
- [4] T. Ikeda and H. Naruse,  $K$ -theoretic analogues of factorial Schur  $P$ - and  $Q$ -functions, *Adv. Math.* **243** (2013), 22–66.
- [5] M. Ishikawa and H. Tagawa, Schur function identities and hook length posets, in “Proceedings of the 19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Tianjin, July 2–6, 2007)”, available at <http://igm.univ-mlv.fr/~fpsac/FPSAC07/SITE07/PDF-Proceedings/Posters/55.pdf>
- [6] M. Ishikawa and H. Tagawa, Leaf posets and multivariate hook length property, 数理解析研究所講究録 **1913** 「ヤング図形・統計物理に関連する代数的組合せ論」 (2014), 67–80.
- [7] M. Kashiwara, The flag manifold of Kac–Moody Lie algebra, in “Algebraic Analysis, Geometry, and Number Theory: Proceedings of the JAMI Inaugural Conference”, ed. J. Igusa, Johns Hopkins Univ. Press, 1989, pp. 161–190.
- [8] A. N. Kirillov and H. Naruse, Construction of double Grothendieck polynomials of classical types using IdCoxeter algebras, *Tokyo J. Math.* **39** (2017), 695–728.
- [9] D. E. Knuth, “The Art of Computer Programming, Volume 3: Sorting and Searching, 3rd Edition”, Addison-Wesley, 1973.
- [10] V. Kreiman, Schubert classes in the equivariant  $K$ -theory and equivariant cohomology of the Grassmannian, arXiv:math/0512204.
- [11] V. Kreiman, Schubert classes in the equivariant  $K$ -theory and equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian, arXiv:math/0602245
- [12] T. Lam, A. Schilling and M. Shimozono,  $K$ -theory Schubert calculus of the affine Grassmannian, *Comp. Math.* **146** (2010), 811–852.
- [13] C. Lenart and M. Shimozono, Equivariant  $K$ -Chevalley rules for Kac–Moody flag manifolds, *Amer. J. Math.* **136** (2014), 1175–1213.
- [14] A. Morales, I. Pak, and G. Panova, Hook formulas for skew shapes I.  $q$ -analogues and bijections, *J. Combin. Theory Ser. A* **154** (2018), 350–405.

- [15] K. Nakada,  $q$ -Hook formula of Gansner type for a generalized Young diagram, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc. **AK** “Proceedings of the 21th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics” (2009), 685–696.
- [16] K. Nakada,  $q$ -Hook formula for a generalized Young diagram, in preparation.
- [17] H. Naruse, Schubert calculus and hook formula, talk slides at 73rd Sém. Lothar. Combin., Strobl, Austria, 2014, available at <http://www.mat.univie.ac.at/~slc/wpapers/s73vortrag/naruse.pdf>
- [18] H. Naruse and S. Okada, Skew hook formula for  $d$ -complete posets via equivariant  $K$ -theory, Algebr. Comb. (to appear), arXiv:1802.09748.
- [19] S. Okada,  $(q, t)$ -Deformations of multivariate hook product formulae, J. Algebraic Combin. **32** (2010), 399–416.
- [20] R. A. Proctor, Dynkin diagram classification of  $\lambda$ -minuscule Bruhat lattices and  $d$ -complete posets, J. Algebraic Combin. **9** (1999), 61–94.
- [21] R. A. Proctor, Minuscule elements of Weyl groups, the number game, and  $d$ -complete posets, J. Algebra **213** (1999), 272–303.
- [22] R. A. Proctor,  $d$ -Complete posets generalize Young diagrams for the hook product formula: Partial presentation of proof, 数理解析研究所講究録 **1913** 「ヤング図形・統計物理に関連する代数的組合せ論」 (2014), 120–140.
- [23] R. P. Stanley, Ordered structures and partitions, Memoirs of the Amer. Math. Soc., no. 119 (1972), iii + 104 pages.
- [24] R. P. Stanley, Theory and application of plane partitions, Parts 2, Studies in Applied Math. **50** (1971), 259–279.
- [25] J. R. Stembridge, Minuscule elements of Weyl groups, J. Algebra **235** (2001), 722–743.